

## Часть II. Методы анализа развития социально-экономических явлений

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТОВ ПО ТЕМЕ «АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ДАННЫХ»

## Постановка задач исследования

**Задание 1.** Расчёт и анализ показателей динамики изучаемого явления.

**Задание 2.** Выявление тенденции развития изучаемого явления (тренда) с помощью методов укрупнения интервалов, скользящей средней, аналитического выравнивания.

**Задание 3.** Определение индексов сезонности развития явления и построение сезонной волны.

**Задание 4.** Прогнозирование социально-экономических показателей на основе метода экстраполяции.

## Демонстрационный пример

При проведении анализа динамики объёмов реализации некоторого условного продукта «А», произведенного предприятиями одного из регионов РФ за пятилетний период, получены статистические данные, представленные в табл.1.

Таблица 1 *Объемы реализации условной продукции «А», произведенной предприятиями одного из регионов РФ за пятилетний период (тыс. тонн)*

Месяцы	1 - й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год
январь	1 435,0	1 330,2	1 287,3	1 304,7	1 262,3
февраль	1 375,1	1 340,3	1 300,7	1 324,0	1 250,7
март	1 610,9	1 620,1	1 577,3	1 589,0	1 612,0
апрель	2 211,6	2 150,5	2 061,3	2 088,7	1 950,0
май	2 563,1	2 500,6	2 450,7	2 440,7	2 350,8
июнь	2 837,9	2 755,8	2 706,7	2 989,3	2 628,0
июль	4 040,9	3 980,0	3 920,0	2 961,3	2 606,0
август	2 488,2	2 420,1	2 368,7	2 367,6	2 178,2
сентябрь	2 014,3	1 980,2	1 928,7	1 879,3	1 857,3
октябрь	1 637,7	1 620,9	1 580,5	1 553,3	1 544,0
ноябрь	1 328,4	1 267,4	1 220,0	1 218,0	1 200,7
декабрь	1 300,3	1 279,8	1 242,7	1 172,0	1 144,7
Итого	24 843,4	24 245,9	23 644,6	22 887,9	21 584,7

## Задание 1

По годовым итогам реализации произведенной продукции (табл.1) необходимо выполнить следующее:

- Рассчитать цепные и базисные показатели динамики объемов реализации продукции: абсолютный прирост, темп роста, темп прироста и абсолютное значение 1 % прироста.
- Рассчитать средние показатели изменения годовых уровней ряда динамики: средний уровень ряда, средний абсолютный прирост, средний темп роста и средний темп прироста.

Сделать выводы по результатам выполнения задания 1.

### Выполнение задания 1

Целью выполнения данного задания является анализ изменения годовых уровней объемов реализации продукции за отдельные периоды времени (в натуральном выражении), а также получение обобщающих оценок изменения годовых уровней ряда за весь исследуемый пятилетний период.

#### 1.1 . Расчёт цепных и базисных показателей, характеризующих изменение объемов реализации произведенной продукции за годовые промежутки времени

Аналитические показатели рядов динамики строятся на основе сравнения двух уровней ряда. Используют два способа сравнения уровней:

1) базисный способ, при котором каждый последующий уровень сравнивается с одним и тем же уровнем, принятым за базу сравнения (то есть база сравнения – постоянная);

2) цепной способ, при котором каждый последующий уровень сравнивается с предыдущим уровнем (то есть база сравнения – переменная).

Соответственно различают:

- **базисные показатели**, обозначаемые надстрочным индексом ***b***;
- **цепные показатели**, обозначаемые надстрочным индексом ***ц***.

Общепотребительные обозначения уровней ряда динамики:

$y_i$  – данный (текущий) уровень;  $y_{i-1}$  – предыдущий уровень;

$y_0$  – базисный уровень;  $y_n$  – конечный уровень;  $\bar{y}$  – средний уровень.

К числу основных аналитических показателей рядов динамики, характеризующих изменения уровней ряда за отдельные промежутки времени, относятся следующие: *абсолютный прирост, темп роста, темп прироста, абсолютное значение одного процента прироста.*

1. **Абсолютный прирост** ( $\Delta_y$ ) характеризует, на сколько в абсолютном выражении увеличился или уменьшился уровень ряда за определенный промежуток времени. Показатель рассчитывается как разница между сопоставляемыми уровнями:

$$\Delta_{y_i}^{\bar{}} = y_i - y_0, \quad (1)$$

$$\Delta_{y_i}^{\Pi} = y_i - y_{i-1}. \quad (2)$$

Значение показателя со знаком “+” означает увеличение уровня, со знаком “-” - снижение.

Абсолютный прирост (сокращение) с переменной базой  $\Delta_y^{\Pi}$  иначе называют **скоростью роста (сокращения)**.

Примечание 1. Цепные и базисные абсолютные приросты взаимосвязаны:

- сумма цепных абсолютных приростов равна базисному абсолютному

приросту за весь исследуемый период: 
$$\sum_{i=1}^n \Delta_{y_i}^{\Pi} = \Delta_{y_n}^{\bar{}};$$

- разность между двумя смежными базисными приростами равна соответствующему цепному абсолютному приросту.

2. **Темп роста** ( $T_p$ ) – показатель интенсивности изменения уровней ряда за определенный промежуток времени. Рассчитывается как относительная величина, выраженная в коэффициентах, по формулам

$$T_{p_i}^{\bar{}} = \frac{y_i}{y_0}, \quad (3) \quad T_{p_i}^{\Pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} \quad (4)$$

или в процентах – по формулам:  $T_{p_i}^{\bar{}} = \frac{y_i}{y_0} * 100 \quad (\%), \quad (5)$

$$T_{p_i}^{\Pi} = \frac{y_i}{y_{i-1}} * 100 \quad (\%) \quad (6)$$

Темп роста всегда число положительное. Если  $T_p=100\%$ , то значение уровня не изменилось; если  $T_p>100\%$ , то значение уровня повысилось, а если  $T_p<100\%$  - понизилось.

Примечание 2. Между цепными и базисными темпами роста существует взаимосвязь:

- произведение цепных темпов роста равно базисному темпу роста за весь

исследуемы период: 
$$\prod_{i=1}^n T_{p_i}^u = T_{p_n}^b$$

- частное от деления двух смежных базисных темпов роста равно соответствующему цепному темпу роста.

3. *Темп прироста ( $T_{np}$ )* – показатель, характеризующий относительную скорость изменения уровней ряда в единицу времени. Он показывает, на сколько процентов один уровень больше (или меньше) другого, принятого за базу сравнения. Рассчитывается путем вычитания 100% из соответствующего темпа роста (базисного или цепного): 
$$T_{np_i} = T_{p_i} - 100 (\%) \quad (7)$$

4. *Абсолютное значение (содержание) 1 % прироста ( $A_{1\%}$ )* показывает, сколько абсолютных единиц уровней ряда приходится на 1% прироста. Показатель рассчитывается как отношение цепного абсолютного прироста к соответствующему цепному темпу прироста или как одна сотая часть предыдущего уровня.

$$A_{1\%i} = \frac{\Delta_{y_i}^u}{T_{np_i}^u} = 0,01 * y_{i-1} \quad (8)$$

Аналитические показатели **годовых** изменений уровней ряда, рассчитанные по формулам (1)-(8) для данных табл.1, приведены в табл.2.

Таблица 2 Показатели анализа динамики объемов реализации условной продукции «А», произведенной предприятиями одного из регионов РФ за пятилетний период (тыс. тонн)

Годы	Объем реализации, тыс. тонн	Абсолютный прирост, тыс. тонн		Темп роста, %		Темп прироста, %		Абсолютное значение 1 % прироста, тыс. тонн
		базисный	цепной	базисный	цепной	базисный	цепной	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1-й	24 843,4	-	-	-	-	-	-	-
2-й	24 245,9	-597,5	-597,5	97,6	97,6	-2,4	-2,4	248,4
3-й	23 644,6	-1 198,8	-601,3	95,2	97,5	-4,8	-2,5	242,5
4-й	22 887,9	-1 955,5	-756,7	96,8	96,8	-7,9	-3,2	236,4
5-й	21 584,7	-3 258,7	-1 303,2	86,9	92,1	-13,1	-5,7	228,9

**Вывод.** Как показывают данные табл. 2, объем реализации произведенной продукции постоянно снижался. В целом за исследуемый период объем реализации продукции снизился на 3258,7 тыс. тонн (гр.3) или на 13,1% (гр.7). Снижение объема реализации продукции носит ускоренный характер, что подтверждается постоянно увеличивающимися (по модулю) значениями цепных абсолютных сокращений - с 597,5 до 1303,2 тыс. тонн. (гр.4) и цепных темпов прироста - с 2,4% до 5,7% (гр.8). Замедление объемов реализации продукции подтверждается также систематически сокращающейся величиной абсолютного значения 1% прироста - с 248,4 до 228,9 тыс. тонн (гр.9).

### 1.2. Расчёт средних показателей анализа ряда динамики объемов реализации произведенной продукции

В табл. 2 представлены данные, характеризующие динамику изменения уровней ряда за отдельные периоды времени. Для обобщающей оценки изменений уровней ряда за весь рассматриваемый период времени необходимо рассчитать средние показатели динамики. В анализе динамики развития явления в зависимости от вида исходного ряда динамики используются различные *средние показатели динамики, характеризующие изменения ряда динамики в целом.*

**1. Средний уровень ряда динамики ( $\bar{y}$ )** характеризует типичную величину уровней ряда. Показатель рассчитывается по разным формулам для различных видов рядов динамики – интервальных, моментных, с равноотстоящими и неравноотстоящими уровнями\*.

Для интервального ряда динамики с равноотстоящими уровнями времени средний уровень ряда определяется как *простая арифметическая средняя* из

уровней ряда: 
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (9)$$

где n- число уровней ряда.

В случае неравноотстоящих уровней для расчета  $\bar{y}$  используется *средняя*

*арифметическая взвешенная:* 
$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad (10)$$

где веса  $t_i$ – длительность интервалов времени (дней месяцев и т.д) между смежными уровнями.

Для моментного ряда динамики с равноотстоящими уровнями средний уровень ряда определяется по формуле *средней хронологической простой*:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{n-1} \quad (11)$$

где n- число уровней ряда.

В случае неравноотстоящих уровней применяется формула *средней хронологической взвешенной*:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)t_1 + (y_2 + y_3)t_2 + \dots + (y_{n-1} + y_n)t_{n-1}}{2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i} \quad (12)$$

**2. Средний абсолютный прирост** ( $\bar{\Delta}_y^n$ ) является обобщающей характеристикой индивидуальных абсолютных приростов и определяется как *простая арифметическая средняя* из цепных абсолютных приростов:

$$\bar{\Delta}_y^n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{y_i}^n}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1} \quad (13)$$

где n- число уровней ряда.

**3. Средний темп роста** ( $\bar{T}_p^n$ ) – это сводная обобщающая характеристика интенсивности изменения уровней ряда, показывающая во сколько раз изменялись уровни ряда в среднем за единицу времени. Показатель может быть рассчитан по формуле *средней геометрической простой*:

$$\bar{T}_p^n = \sqrt[n-1]{T_{p1}^n \cdot T_{p2}^n \cdot \dots \cdot T_{pn-1}^n}, \quad (14)$$

где величины  $T_{p_i}^n$  выражены в коэффициентах, или же по формуле

$$\bar{T}_p^n = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, \quad (15)$$

где n – число уровней ряда.

**4. Средний темп прироста** ( $\bar{T}_{np}$ ) рассчитывают с использованием среднего темпа роста:  $\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 100(\%)$  (16)

В проводимом исследовании рассматривается интервальный ряд динамики с равноотстоящими уровнями. С учётом этого обстоятельства для расчета  $\bar{y}$

использована формула (9), для расчета всех остальных средних показателей - соответствующие формулы (13)-(16).

1. Среднегодовой объем реализации продукции:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{24843,4 + 24245,9 + 23644,6 + 22887,9 + 21584,7}{5} = 23441,3 \text{ тыс. тонн 2.}$$

Среднегодовое абсолютное снижение объемов реализации продукции:

$$\bar{\Delta}_y^n = \frac{y_n - y_1}{n - 1} = \frac{21584,7 - 24843,4}{5 - 1} = -814,7 \text{ тыс. тонн}$$

3. Среднегодовой темп снижения объемов реализации продукции:

$$\bar{T}_p = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} = \sqrt[5-1]{\frac{21584,7}{24843,4}} = \sqrt[4]{0,8688} = 0,965 \text{ или } 96,5\%$$

4. Среднегодовой темп сокращения объемов реализации продукции:

$$\bar{T}_{пр.} = \bar{T}_p - 100\% = 96,5\% - 100\% = -3,5\%$$

**Вывод.** За исследуемый период средний объем реализации произведенной продукции составил 23441,3 тыс. тонн. Выявлена отрицательная динамика реализации продукции: ежегодное снижение объема реализации составляло в среднем 814,7 тыс. тонн или 3,5%.

График динамики объемов реализации продукции представлен на рис.1.

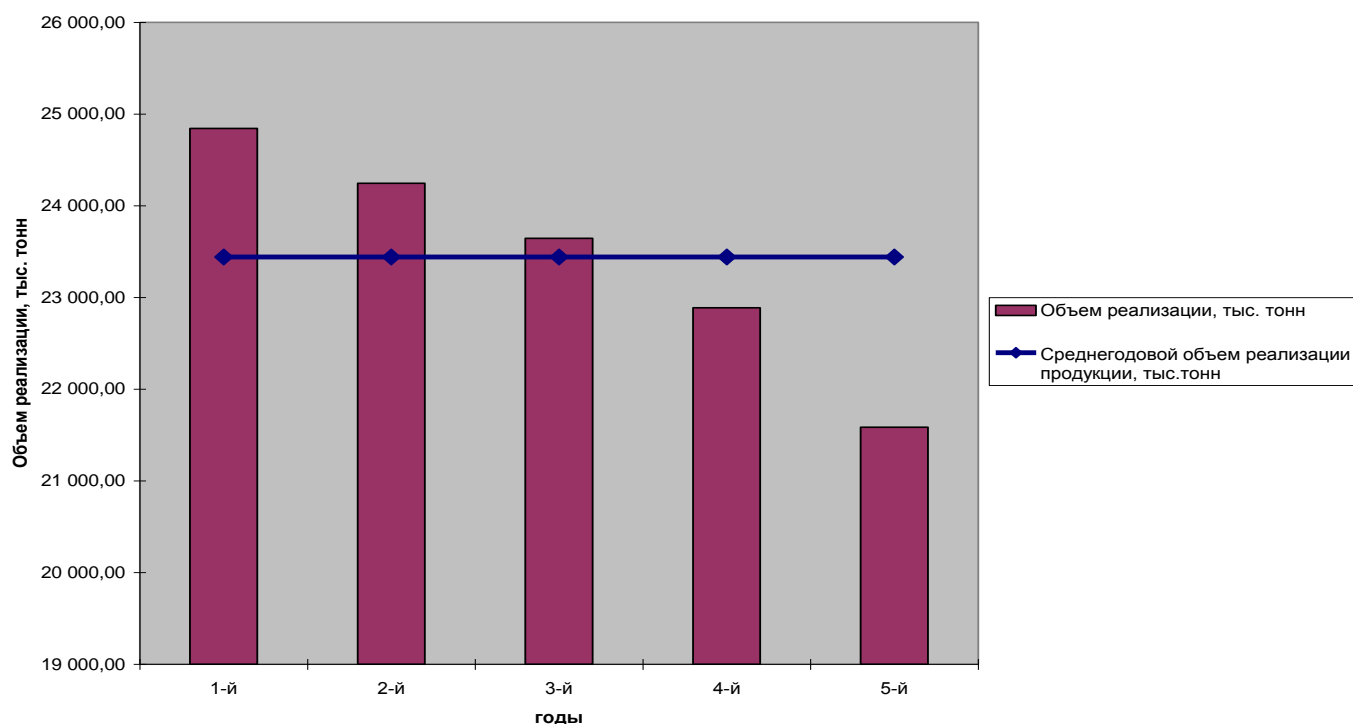


Рис.1 —Динамика объемов реализации продукции за пятилетний период.

## Задание 2

По месячным данным о объемах реализации продукции, произведенной предприятиями одного из регионов РФ *за последний (пятый) год* рассматриваемого периода (табл.1), осуществить сглаживание ряда динамики и графически отразить результаты сглаживания на основе применения методов:

- укрупнения интервалов (переход от помесечных данных к поквартальным);
- скользящей средней (с использованием трёхзвенной скользящей суммы);
- аналитического выравнивания ряда по прямой и параболе.

**Сделать выводы** по результатам выполнения задания 2.

### Выполнение задания 2

*Целью выполнения данного задания* является выявление основной тенденции (тренда) ряда динамики объемов реализации продукции за годовой период, используя *методы укрупнения интервалов, скользящей средней и аналитического выравнивания*, а также отражение полученных результатов с помощью *графического метода*.

Суть различных приемов сглаживания рядов с целью выявления трендов сводится к замене фактических уровней ряда расчетными уровнями, которые в меньшей степени подвержены колебаниям, что способствует более четкому проявлению основной тенденции развития ряда.

#### 2.1. Сглаживание ряда динамики методом укрупнения интервалов

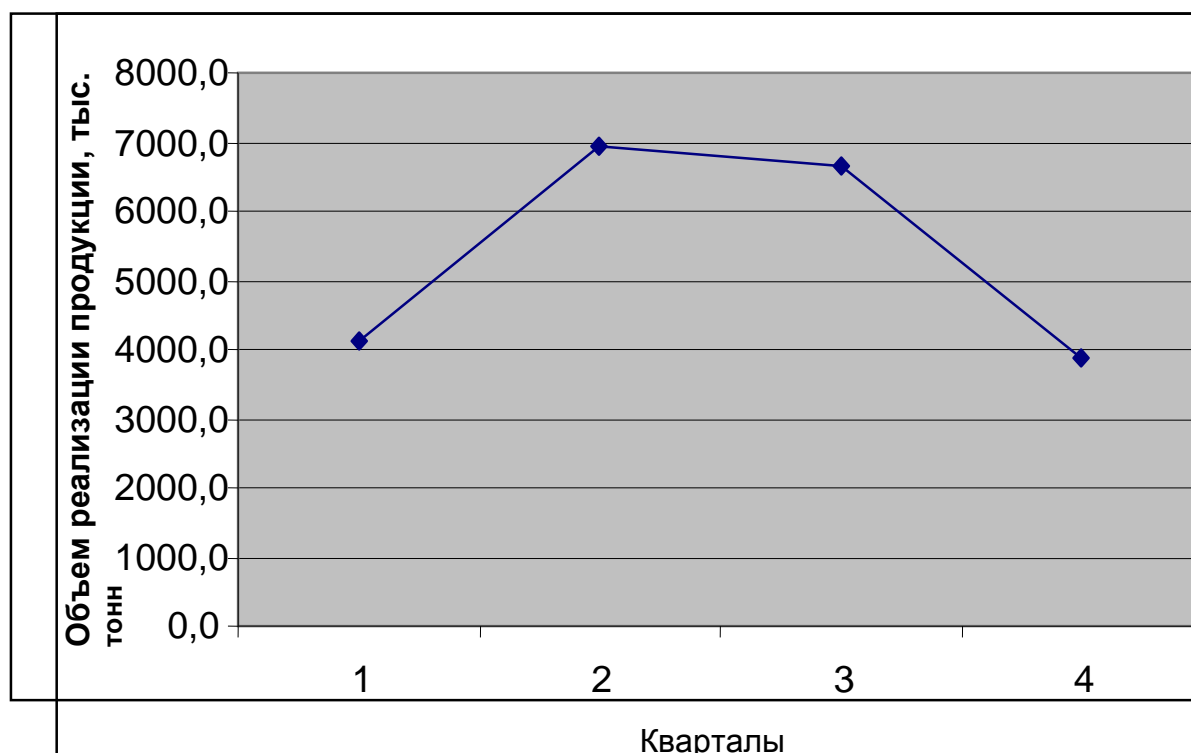
**Метод укрупнения интервалов** – метод, при котором первоначальный ряд динамики заменяется другим рядом динамики, с большими временными промежутками (например, ряд недельных данных можно преобразовать в ряд помесечных данных, ряд квартальных данных заменить годовыми уровнями). Возможно прямое суммирование уровней укрупненного периода или же расчет средних уровней за укрупненный период.

В соответствии с заданием 2 производится укрупнение интервалов последнего (пятого) года рассматриваемого пятилетнего периода путём перехода от помесечных к поквартальным данным об объеме реализации продукции (табл.3).

**Таблица 3** *Расчётная таблица для определения укрупнённых (поквартальных) данных об объеме реализации продукции*

Месяцы	Объем реализации продукции, тыс. тонн	Кварталы	Объем реализации продукции, тыс. тонн
январь	1 262,3	первый	4125,0
февраль	1 250,7		
март	1 612,0		
апрель	1 950,0	второй	6928,8
май	2 350,8		
июнь	2 628,0		
июль	2 606,0	третий	6641,5
август	2 178,2		
сентябрь	1 857,3		
октябрь	1 544,0	четвёртый	3889,4
ноябрь	1 200,7		
декабрь	1 144,7		
Итого	21 584,7	Итого	21584,7

На основе поквартальных данных табл. 3 построена эмпирическая кривая, представляющая собой график динамики развития изучаемого явления (рис. 2).



**Рис. 2. График поквартальной динамики объемов реализации продукции**

**Вывод.** Данные табл. 3 и рисунок 2, показывают, что в результате применения метода укрупнения интервалов проявилась тенденция развития явления, для

отображения которой целесообразно использовать параболическую функцию

$$\hat{y} = a_0 + a_1t + a_2t^2.$$

## 2.2 . Сглаживание ряда динамики с применением скользящей средней

**Метод скользящей средней** – метод, при котором формируют укрупнённые интервалы, состоящие из одинакового числа уровней, - трехзвенные, пятизвенные, семизвенные и т.д. При этом соблюдается правило: каждый последующий укрупненный интервал получают, путем постепенного смещения начала отсчета интервала на один уровень (отбрасывается один уровень в начале интервала и добавляется один следующий). Для трёхзвенного укрупнения интервалов:

первый интервал:  $y_1, y_2, y_3$ ;

второй интервал:  $y_2, y_3, y_4$ ;

.....;

последний интервал:  $y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ .

По каждому из полученных укрупненных интервалов определяется средний уровень. Таким образом, при расчете средних они как бы «скользят» по ряду динамики от его начала к концу (отсюда название «скользящая средняя»). Выровненные данные отображаются эмпирической кривой.

При выполнении задания 2 на основании исходных данных табл. 1 для последнего (пятого) года определены значения скользящей трёхзвенной суммы, а также рассчитаны значения скользящей средней.

При этом сначала было произведен расчет средней за первые три месяца:

$$\left(\frac{1262,3 + 1250,7 + 1612,0}{3}\right) = 1375,0 \text{ тыс. тонн}$$

Затем определена средняя за три месяца, начиная с февраля:

$$\left(\frac{1250,7 + 1612,0 + 1950,0}{3}\right) = 1604,2 \text{ тыс. тонн.}$$

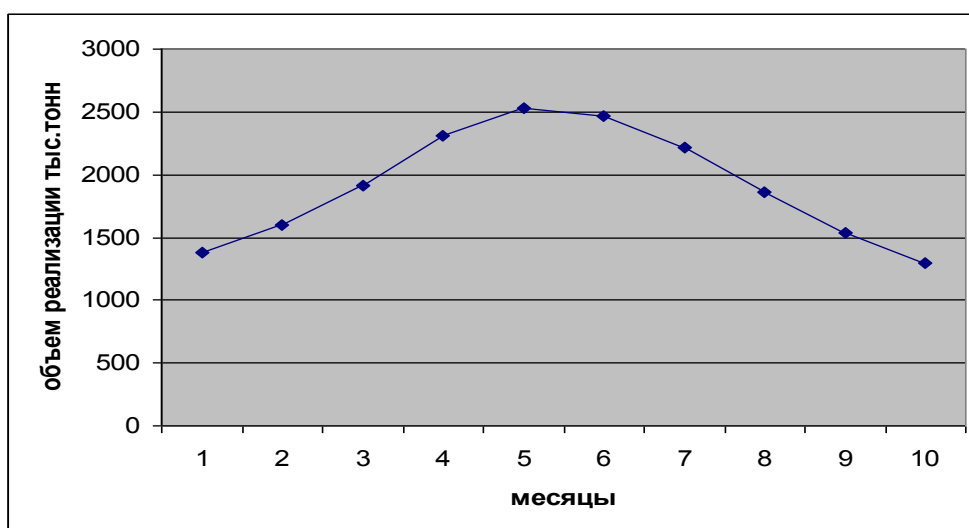
и т.д. Полученный новый ряд динамики, состоящий из скользящих средних уровней, представлен в табл.4.

**Таблица 4** Расчётная таблица для определения значений скользящей средней

Месяцы	Объем реализации, тыс. тонн	Скользящая трёхзвенная сумма, тыс. тонн	Скользящая средняя, тыс. тонн
январь	1 262,3	-	-
февраль	1 250,7	4125,0	1375,0

март	1 612,0	4812,7	1604,2
апрель	1 950,0	5912,8	1907,9
май	2 350,8	6928,8	2309,6
июнь	2 628,0	7584,8	2528,3
июль	2 606,0	7412,2	2470,7
август	2 178,2	6641,5	2213,8
сентябрь	1 857,3	5579,5	1859,8
октябрь	1 544,0	4602,0	1534,0
ноябрь	1 200,7	3889,4	1296,5
декабрь	1 144,7	-	-

Эмпирическая кривая, иллюстрирующая сглаженный ряд динамики, построенный методом скользящих средних представлена на рис. 3.



**Рис. 3. График динамики объемов реализации продукции рассчитанных методом скользящей средней**

**Вывод.** Как показывают данные табл.4, а также рис.3, значения скользящей средней до середины года систематически возрастали, но к концу года снизились до исходного уровня (даже несколько ниже его), что свидетельствует о параболической тенденции изменения объемов реализации продукции за последний год рассматриваемого периода.

### 2.3. Сглаживание ряда динамики с помощью метода аналитического выравнивания

В отличие от двух предыдущих методов (укрупнения интервалов, скользящей средней) метод аналитического выравнивания позволяет не только выровнять данные, но и представить развитие ряда динамики в виде функции времени  $y = f(t)$ .

При таком подходе изменение явления связывают лишь с течением времени: считается, что влияние других факторов несущественно или же косвенно сказывается через фактор времени. Правильно построенная модель  $y = f(t)$  должна

соответствовать характеру изменения тенденции изучаемого явления. Выбранная функция  $y=f(t)$  позволяет получить выровненные (теоретические) значения уровней ряда динамики.

Для отображения трендов применяются различные функции: полиномы разной степени, экспоненты, логистические функции и т.д.

Оценка параметров в моделях  $y = f(t)$  находится методом наименьших квадратов (МНК), суть которого состоит в определении таких значений параметров (коэффициентов уравнения), при которых сумма квадратов отклонений расчетных значений уровней от фактических была бы минимальной:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{t_i})^2 \rightarrow \min \quad (17)$$

где  $y_i$  - фактическое значение уровня ряда динамики;  $\hat{y}_t$  - расчетные значения;  $n$  - число уровней ряда.

### 2.3.1. Аналитическое выравнивание ряда динамики по прямой

Аналитическое уравнение прямой имеет вид:

$$\hat{y} = a + b \cdot t, \quad (18)$$

где  $t$  – порядковый номер периодов времени (или моментов);

$\hat{y}$  – выровненные значения ряда динамики.

Система нормальных уравнений в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i = a \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{cases} \quad (19)$$

Отсчёт времени удобно производить так, чтобы сумма показателей времени ряда

динамики была равна нулю, то есть:  $\sum_{i=1}^n t_i = 0$  (20)

При нечётном числе уровней ряда динамики для достижения равенства (20) уровень, находящийся в середине ряда, условно принимается за начало отсчёта времени, то есть этому периоду времени (или моменту) придаётся нулевое значение.

Все последующие за нулевым уровнем обозначаются: +1;+2;+3 и т.д., а все

предыдущие уровни в порядке расчёта, начиная от нулевого, обозначаются соответственно: -1;-2;-3 и т.д.

При чётном числе уровней ряда динамики для достижения равенства (20) уровни первой половины ряда (от конца этой половины и до начала ряда динамики) нумеруются: -1;-2;-3 и т.д., а уровни второй половины ряда (от начала этой половины и до конца ряда динамики) обозначаются соответственно: +1;+2;+3 и т.д.

При соблюдении указанного принципа отсчёта времени  $t$  от условного нулевого начала система нормальных уравнений (19) преобразуется к более простому виду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \cdot n \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i = b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{cases} \quad (21)$$

Решение системы 21 относительно неизвестных  $a, b$  позволяет определить параметры уравнения прямой (18):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y} \quad (22)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} \quad (23)$$

### 2.3.2. Аналитическое выравнивание ряда динамики по параболе

Аналитическое уравнение параболы имеет вид:

$$\hat{y} = a + b \cdot t + c \cdot t^2 \quad (24)$$

Параметры уравнения  $a, b$  и  $c$  определяются на основе МНК.

Система нормальных уравнений в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i = a \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i^2 = a \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{cases} \quad (25)$$

При соблюдении принципа отсчёта времени  $t$  от условного нулевого начала система нормальных уравнений (25) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \cdot n + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i = b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i^2 = a \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n t_i^4 \end{cases} \quad (26)$$

Решение системы уравнений (26) относительно неизвестных  $a, b, c$  позволяет определить параметры уравнения параболы (24).

Методику расчёта параметров уравнений прямой и параболы для данных последнего года рассматриваемого периода (табл.1) иллюстрирует табл.5.

*Таблица 5* Расчетная таблица для определения параметров уравнений прямой и параболы

Месяцы	$y_i$	$t_i$	$t_i^2$	$y_i \cdot t_i$	$y_i \cdot t_i^2$	$t_i^4$
1	2	3	4	5	6	7
январь	1 262,3	-6	36	-7 573,8	45 442,8	1 296
февраль	1 250,7	-5	25	-6 253,5	31 267,5	625
март	1 612,0	-4	16	-6 448,0	25 792,0	256
апрель	1 950,0	-3	9	-5 850,0	17 550,0	81
май	2 350,8	-2	4	-4 701,6	9 403,2	16
июнь	2 628,0	-1	1	-2 628,0	2 628,0	1
июль	2 606,0	1	1	2 606,0	2 606,0	1
август	2 178,2	2	4	4 356,4	8 712,8	16
сентябрь	1 857,3	3	9	5 571,9	16 715,7	81
октябрь	1 544,0	4	16	6 176,0	24 704,0	256
ноябрь	1 200,7	5	25	6 003,5	30 017,5	625
декабрь	1 144,7	6	36	6 868,2	41 209,2	1 296
Итого	21 584,7	0	182	-1 872,9	256 048,7	4550

При подстановке итоговых данных гр. 2 в формулу 22, итоговых данных гр. 4 и 5 – в формулу 23 параметры уравнения прямой получают следующие значения:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{21584,7}{12} = 1798,725 \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2} = \frac{-1872,9}{182} = -10,291$$

Таким образом, основная тенденция развития ряда отображается уравнением прямой:  $\hat{y} = 1798,725 - 10,291 \cdot t$

Для определения параметров уравнения параболы итоговые данные гр. 2, 4-7 необходимо подставить в систему уравнений 2б:

$$\begin{cases} 21584,7 = 12 \cdot a + 182 \cdot c \\ -1872,9 = 182 \cdot b \\ 256048,7 = 182 \cdot a + 4550 \cdot c \end{cases}$$

Решая систему, из 2-го уравнения определяют значение **b**:

$$b = \frac{-1872,9}{182} = -10,291$$

Затем из 1-го уравнения выражают значение **a**, через параметр **c**:

$$a = \frac{21584,7 - 182 \cdot c}{12}$$

Подставляя значение, **a** в 3-е уравнение системы, получаем уравнение относительно **c**:

$$256048,7 = \frac{182 \cdot (21584,7 - 182 \cdot c)}{12} + 4550 \cdot c$$

Решение последнего уравнения позволяет определить значение параметра **c**, а затем параметра **a**:

$$c = -39,851$$

$$a = \frac{21584,7 - 182 \cdot (-39,851)}{12} = 2403,132$$

Таким образом, параболическая модель ряда имеет вид:

$$\hat{y} = 2403,132 - 10,291 \cdot t - 39,851 \cdot t^2$$

Правильность расчёта уровней выровненного ряда динамики проверяется следующим способом: сумма значений уровней эмпирического ряда  $y_i$  должна совпадать с суммой значений уровней выровненного ряда  $\hat{y}_i$ , то есть:

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \hat{y}_{t_i} \quad (27)$$

Для того, чтобы определить, какое из полученных уравнений наиболее адекватно исходному ряду динамики, для каждого из них рассчитывают среднеквадратическое отклонение (среднеквадратическую ошибку)  $\sigma_{\hat{y}}$ , которое

определяется по следующей формуле: 
$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{t_i})^2}{n - m}}, \quad (28)$$

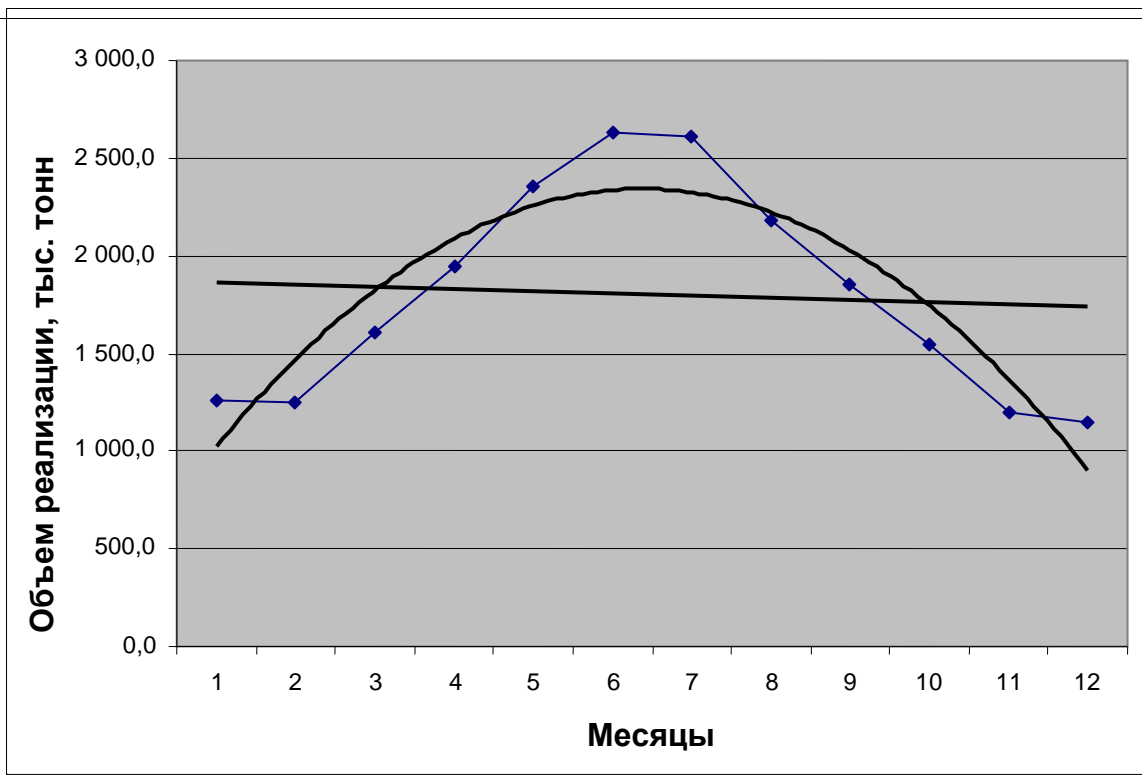
где  $m$  – число параметров в уравнении тренда (для уравнения прямой  $m=2$ , для уравнения параболы  $m=3$ ).

С целью проверки правильности проведенных расчетов параметров уравнений прямой и параболы, а также выбора наиболее адекватной модели развития изучаемого явления, построена расчётная табл. 6

*Таблица 6 Расчётная таблица*

Месяцы	$Y_i$	$\hat{y}_{t_i}$		$y_i - \hat{y}_{t_i}$		$(y_i - \hat{y}_{t_i})^2$	
		для уравнения		для уравнения		для уравнения	
		прямой	параболы	прямой	параболы	прямой	параболы
1	2	3	4	5	6	7	8
январь	1 262,3	1860,5	1030,2	-598,2	232,1	357808,5452	53850,9154
февраль	1 250,7	1850,2	1458,3	-599,5	-207,6	359376,2704	43102,7425
март	1 612,0	1839,9	1806,7	-227,9	-194,7	51933,3963	37900,3024
апрель	1 950,0	1829,6	2075,3	120,4	-125,3	14496,6416	15711,6197
май	2 350,8	1819,3	2264,3	531,5	86,5	282484,8090	7480,5201
июнь	2 628,0	1809,0	2373,6	819,0	254,4	670734,7923	64733,6072
июль	2 606,0	1788,4	2353,0	817,6	253,0	668414,1644	64014,0601
август	2 178,2	1778,1	2223,1	400,1	-44,9	160045,6032	2020,1429
сентябрь	1 857,3	1767,9	2013,6	89,4	-156,3	8000,9447	24429,6900
октябрь	1 544,0	1757,6	1724,4	-213,6	-180,4	45608,3007	32526,8439
ноябрь	1 200,7	1747,3	1355,4	-546,6	-154,7	298738,7649	23932,7088
декабрь	1 144,7	1737,0	906,8	-592,3	238,0	350794,4138	56620,2025
Итого	21 584,7	21584,7	21584,7	0,0	0,0	3268436,6466	426323,3555

Равенство итоговых значений гр.2,3,4 показывает, что согласно критерию 27 расчеты коэффициентов уравнений прямой и параболы выполнены правильно. Графики соответствующих сглаживающих кривых представлены на рис.4.



**Рис. 4.** Сглаживание ряда динамики объемов реализации продукции методом аналитического выравнивания по прямой и параболе

Для выбора наиболее адекватной модели развития ряда (прямой или параболы) необходимо рассчитать среднеквадратическое отклонение  $\sigma_{\hat{y}}$  по формуле 27 с использованием итоговых данных гр.7,8 табл.6.

Для уравнения прямой:  $\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{3268436,6466}{12 - 2}} = 571,702 \text{ тыс. тонн},$

Для уравнения параболы:  $\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{426323,3555}{12 - 3}} = 217,645 \text{ тыс. тонн}$

**Вывод.** Величина среднеквадратической ошибки  $\sigma_{\hat{y}}$ , рассчитанная для уравнения параболы значительно меньше, чем для уравнения прямой.

Следовательно, уравнение параболы  $\hat{y} = 2403,132 - 10,291 \cdot t - 39,851 \cdot t^2$  является более адекватной моделью описания тенденции ряда динамики объемов реализации продукции по сравнению с уравнением прямой  $\hat{y} = 1798,725 - 10,291 \cdot t$

Этот же вывод подтверждают графики сглаживания ряда динамики на рис.4.

Параболическая форма ряда может объясняться разными причинами, в том числе наличием сезонной компоненты в развитии явления.

Аналитическое выравнивание рядов динамики широко используется при построении прогнозов на основе метода экстраполяции. Применение программных

продуктов позволяет при помощи компьютеров оперативно определить адекватное уравнение тренда, на основании которого при необходимости можно делать прогноз.

### Задание 3

На основании помесечных данных о динамике объемов реализации продукции за пятилетний период (табл. 1) необходимо выполнить следующее:

- определить индексы сезонности реализации продукции;
- построить график сезонной волны.

Сделать выводы по результатам выполнения задания 3.

### Выполнение задания 3

Целью выполнения данного задания является выявление сезонной компоненты в динамике объемов реализации продукции.

#### 3.1. Определение индексов сезонности реализации продукции

Периодические колебания, которые имеют постоянный годовой период, определяются как *сезонные колебания (сезонные волны)*.

Сезонные колебания характеризуются в статистике индексами сезонности

**Индекс сезонности** ( $I_{Si}$ ) – отношение средней величины уровня, рассчитанной для каждого из 12 календарных месяцев за ряд лет ( $\bar{y}_i$ ), к среднемесячному уровню ряда динамики за весь рассматриваемый период ( $\bar{y}$ ), выраженное в процентах: 
$$I_{Si} = \frac{\bar{y}_i}{\bar{y}} \cdot 100, \quad (29)$$

где  $\bar{y}_i$  – средний уровень за  $i$ -ый месяц года;

$\bar{y}$  – среднемесячный уровень за весь пятилетний период исследования.

Расчёты индексов сезонности для данных табл.1 в табл. 7.

Таблица 7 Расчётная таблица для определения индексов сезонности

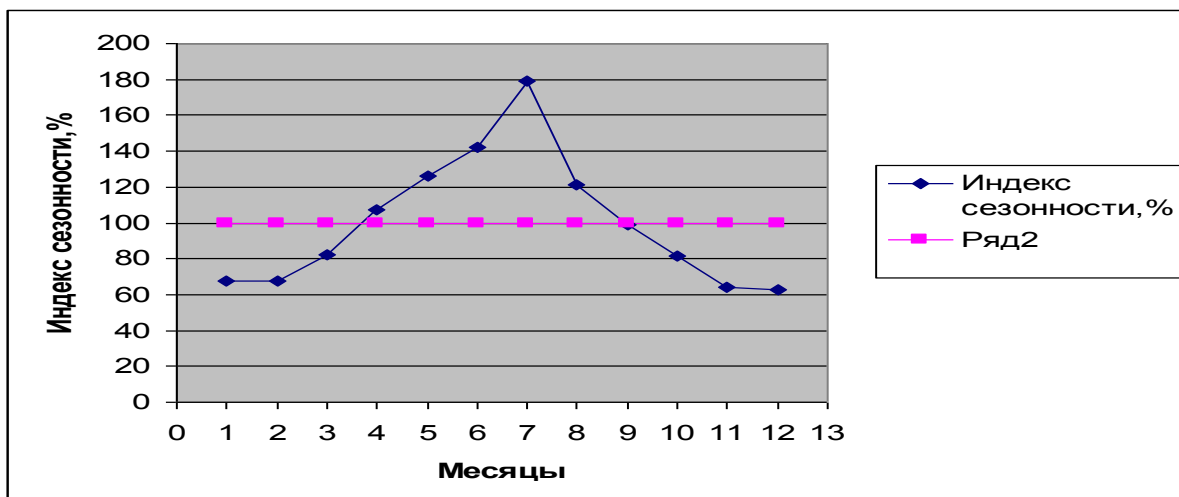
Месяц	Объем реализации, тыс. тонн					Средне- месячн. объем реализации, тыс. тонн $\bar{y}_i$	Индекс сезонност, % $I_{Si}$
	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год		
январь	1 435,0	1 330,2	1 287,3	1 304,7	1 262,3	1 323,9	67,77
февраль	1 375,1	1 340,3	1 300,7	1 324,0	1 250,7	1 318,2	67,48
март	1 610,9	1 620,1	1 577,3	1 589,0	1 612,0	1 601,9	82,00

апрель	2 211,6	2 150,5	2 061,3	2 088,7	1 950,0	2 092,4	107,11
май	2 563,1	2 500,6	2 450,7	2 440,7	2 350,8	2 461,2	125,99
июнь	2 837,9	2 755,8	2 706,7	2 989,3	2 628,0	2 783,5	142,49
июль	4 040,9	3 980,0	3 920,0	2 961,3	2 606,0	3 501,6	179,25
август	2 488,2	2 420,1	2 368,7	2 367,6	2 178,2	2 364,6	121,05
сентябрь	2 014,3	1 980,2	1 928,7	1 879,3	1 857,3	1 932,0	98,90
октябрь	1 637,7	1 620,9	1 580,5	1 553,3	1 544,0	1 587,3	81,26
ноябрь	1 328,4	1 267,4	1 220,0	1 218,0	1 200,7	1 246,9	63,83
декабрь	1 300,3	1 279,8	1 242,7	1 172,0	1 144,7	1 227,9	62,86
Итого	24 843,4	24 245,9	23 644,6	22 887,9	21 584,7	1 953,4	100,0

**Вывод:** В динамике объемов реализации продукции явно прослеживается наличие сезонной компоненты. Наибольшим средним значением объемов реализации продукции за пять лет характеризуется месяц июль – 3501,6 тыс. тонн ( $I_{\text{Июль}} = 179,25\%$ ), а наименьшее среднее значение приходится на декабрь – 1227,9 тыс. тонн ( $I_{\text{Декабрь}} = 62,86\%$ ).

### 3.2. Построение сезонной волны реализации продукции

На основании полученных в табл.7 данных об индексах сезонности построен график сезонной волны (рис 5).



**Рис.5.** Сезонная волна динамики объемов реализации за пятилетний период

**Вывод.** График сезонной волны (рис. 5), наглядно демонстрирует наличие сезонной компоненты в реализации произведенной продукции: наибольшими объемами реализации характеризуется месяцы май, июнь, июль, август, а наименьшими – январь, февраль, ноябрь, декабрь.

### Задание 4

На основании ряда динамики годовых объемов реализации продукции (табл.1), а также данных, полученных при выполнении задания 1, 2, необходимо сделать прогноз на последующие 2 года вперед с использованием:

- среднего абсолютного прироста;
- среднего темпа роста;
- аналитического выравнивания ряда динамики по прямой.

**Сделать выводы** по результатам выполнения задания 4.

#### **Выполнение задания 4**

*Целью выполнения данного задания* является построение методом экстраполяции прогноза объемов реализации продукции, произведенного одного из регионов РФ, на ближайшую перспективу.

Применение метода экстраполяции основано на инерционности развития социально-экономических явлений и заключается в предположении о том, что тенденция развития данного явления в будущем не будет претерпевать каких-либо существенных изменений. При этом с целью получения окончательного прогноза всегда следует учитывать все имеющиеся предпосылки и гипотезы дальнейшего развития рассматриваемого социально-экономического явления. Прогноз, сделанный на период экстраполяции (период упреждения), больший 1/3 периода исследования не может считаться научно обоснованным.

##### **4.1. Прогнозирование объемов реализации продукции с использованием среднего абсолютного прироста**

Прогнозирование уровня ряда динамики с использованием среднего абсолютного прироста осуществляется по следующей формуле:

$$\hat{y}_{i+t} = y_i + \bar{\Delta} \cdot t, \quad (30)$$

где:  $\hat{y}_{i+t}$  – прогнозируемый уровень;  $t$  – период упреждения (число лет, кварталов и т.п.);  $y_i$  – базовый для прогноза уровень;  $\bar{\Delta}$  – средний за исследуемый период абсолютный прирост (среднегодовой, среднеквартальный и т.п.).

Прогнозируемый объем реализации продукции на 7 год (по данным пятилетнего периода) с использованием среднего абсолютного прироста, рассчитанного в задании 1, исчисляется следующим образом:

$$\hat{y}_{i+t} = y_i + \bar{\Delta} \cdot t = 21584,7 - 814,7 \cdot 2 = 19955,3 \text{ тыс. тонн}$$

#### 4. 2. Прогнозирование объемов реализации продукции с использованием среднего темпа роста

Прогнозирование уровня ряда динамики с использованием среднего темпа (коэффициента) роста осуществляется по следующей формуле:

$$\hat{y}_{i+t} = y_i \cdot \overline{T}_p^t, \quad (31)$$

где:  $\overline{T}_p$  – средний за исследуемый период темп роста (среднегодовой, среднеквартальный и т.п.).

Прогнозируемый объем реализации продукции на седьмой год (по данным пятилетнего периода) с использованием среднего темпа роста, рассчитанного в задании 1, исчисляется следующим образом:

$$\hat{y}_{i+t} = y_i \cdot \overline{T}_p^t = 21584,7 \cdot 0,965^2 = 20100,2 \text{ тыс. тонн}$$

#### 4. 3. Прогнозирование объемов реализации продукции методом аналитического выравнивания ряда динамики по прямой

Модель прямолинейной зависимости уровня ряда от фактора времени имеет следующий вид:  $\hat{y} = a + b \cdot t$

Параметры уравнения  $a$  и  $b$  определяются путем решения системы нормальных уравнений 19:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = a \cdot n + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot t_i = a \cdot \sum_{i=1}^n t_i + b \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{cases}$$

Для конкретизации общего вида системы нормального уравнения применительно к исходным данным необходимо знать значение величин  $\sum_{i=1}^n y_i$ ,

$\sum_{i=1}^n y_i t_i$ ,  $\sum_{i=1}^n t_i$ ,  $\sum_{i=1}^n t_i^2$  их расчет приведен во вспомогательной табл.8

**Таблица 8** Вспомогательная таблица для расчёта параметров тренда

Период	Объем реализации, тыс. тонн $y_i$	Условное обозначение периодов, $t_i$	$y_i t_i$	$t_i^2$	Выровненные уровни ряда динамики, тыс. тонн. $\hat{y}_i$
1	2	3	4	5	6
1-й год	24 843,4	1	24843,4	1	25016,4

2-й год	24 245,9	2	48491,8	4	24228,8
3-й год	23 644,6	3	70933,8	9	23441,3
4-й год	22 887,9	4	91551,6	16	22653,8
5-й год	21 584,7	5	107923,5	25	21866,2
Итого	117 206,5	15	343744,1	55	117206,5

С учетом итоговой строки табл.8 система нормальных уравнений (19) принимает вид

$$\begin{cases} 5a + 15b = 117206,5 \\ 15a + 55b = 343744,1 \end{cases}$$

где  $a$  и  $b$  неизвестные параметры.

Решая систему путем исключения переменной  $a$  получаем значение  $b$ :

$$b = -787,54$$

Подставляя значение  $b$  в первое уравнение системы, получаем значение  $a$ :

$$a = 25803,92$$

Таким образом, прямолинейная модель тренда имеет вид:

$$\hat{y} = 25803,92 - 787,54 \cdot t$$

Правильность расчётов уровней выровненного ряда динамики проверяется по критерию (27): совпадение значений гр.2 и 6.

Прогнозируемый объем реализации продукции на 7 год (по данным пятилетнего периода) методом аналитического выравнивания ряда динамики по прямой, исчисляется по уравнению тренда:

$$\hat{y} = 25803,92 - 787,54 \cdot t = 25803,92 - 787,54 \cdot 7 = 20291,14 \text{ тыс. тонн}$$

**Вывод.** Как показывают полученные прогнозные данные, все прогнозируемые объемы реализации продукции на 7 год (по данным пятилетнего периода) довольно близки между собой: 19955,3; 20100,2 и 20291,14, тыс. тонн. Расхождение полученных данных объясняется тем, что в основу прогнозирования положены разные методики экстраполяции рядов динамики.

# Практическое задание по вариантам

(номер варианта получить у преподавателя)

*t* - номер вашего варианта

Исходные данные:

При проведении анализа динамики объёмов реализации некоторого условного продукта «А», произведенного предприятиями одного из регионов РФ за пятилетний период, получены статистические данные, представленные в табл.1.

Таблица 1 *Объемы реализации условной продукции «А», произведенной предприятиями одного из регионов РФ за пятилетний период (тыс. тонн)*

Месяцы	1 - й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год
январь	720,0+t	632,8+t	634,9+t	701,2+t	631,1+t
февраль	651,1+t	712,5+t	697,3+t	623,0+t	624,9+t
март	810,7+t	808,4+t	754,2+t	755,5+t	806,3+t
апрель	1011,5+t	1025,3+t	1030,4+t	1032,1+t	889,0+t
май	1400,2+t	1300,0+t	1220,4+t	1210,4+t	1123,6+t
июнь	1456,7+t	1408,8+t	1358,0+t	1569,1+t	1314,3+t
июль	2 010,3+t	1780,3+t	1890,9+t	1870,6+t	1003,9+t
август	1 311,7+t	1200,7+t	1269,4+t	1200,6+t	1095,1+t
сентябрь	1 009,4+t	990,6+t	990,3+t	950,2+t	935,6+t
октябрь	809,7+t	810,4+t	785,5+t	778,8+t	748,4+t
ноябрь	678,9+t	678,5+t	631,5+t	619,2+t	600,1+t
декабрь	599,2+t	700,8+t	642,8+t	670,9+t	712,4+t
Итого					

## Задание 1 (занятие 1)

По годовым итогам реализации произведенной продукции (табл.1) необходимо выполнить следующее:

- Рассчитать цепные и базисные показатели динамики объемов реализации продукции: абсолютный прирост, темп роста, темп прироста и абсолютное значение 1 % прироста.

- Рассчитать средние показатели изменения годовых уровней ряда динамики: средний уровень ряда, средний абсолютный прирост, средний темп роста и средний темп прироста.

**Сделать выводы** по результатам выполнения задания 1.

### **Задание 2 (занятие 2)**

По месячным данным об объемах реализации продукции, произведенной предприятиями одного из регионов РФ *за последний (пятый) год* рассматриваемого периода (табл.1), осуществить сглаживание ряда динамики и графически отразить результаты сглаживания на основе применения методов:

- укрупнения интервалов (переход от помесечных данных к поквартальным);
- скользящей средней (с использованием трёхзвенной скользящей суммы);
- аналитического выравнивания ряда по прямой и параболе.

**Сделать выводы** по результатам выполнения задания 2.

### **Задание 3 (занятие 3)**

На основании помесечных данных о динамике объемов реализации продукции за пятилетний период (табл. 1) необходимо выполнить следующее:

- определить индексы сезонности реализации продукции;
- построить график сезонной волны.

**Сделать выводы** по результатам выполнения задания 3.

### **Задание 4 (занятие 4,5)**

На основании ряда динамики годовых объемов реализации продукции (табл.1), а также данных, полученных при выполнении задания 1, 2, необходимо сделать прогноз на последующие 3 года вперед с использованием:

- среднего абсолютного прироста;
- среднего темпа роста;
- аналитического выравнивания ряда динамики по прямой.

**Сделать выводы** по результатам выполнения задания 4.